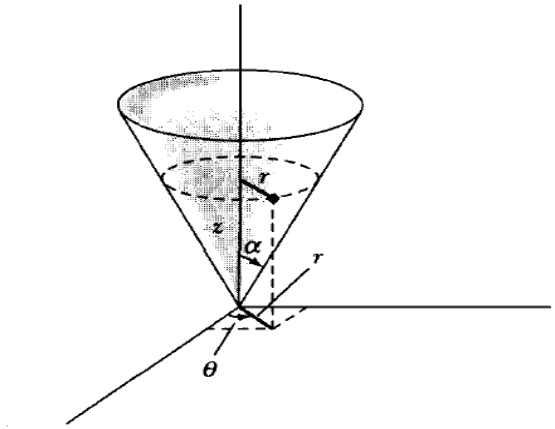
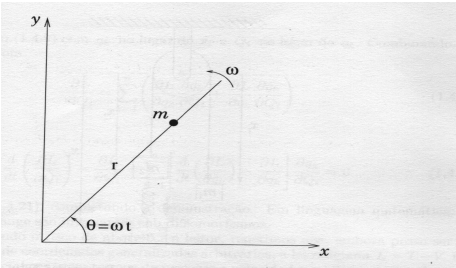
Lista área I

1. Resolva os problemas 1.1, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.11, 1.14 do livro de Nivaldo Lemos.

2. Uma partícula de massa *m* desliza, sob a ação do campo gravitacional, sobre a superfície interna de um cone de semi-ângulo α, como mostra a figura. Não existe atrito entre a partícula e a superfície. Identifique um conjunto de coordenadas generalizadas, escreva as equações de movimento de Lagrange para a partícula, mostre que uma possível trajetória corresponde a um círculo com velocidade angular constante ω e determine o raio da órbita.

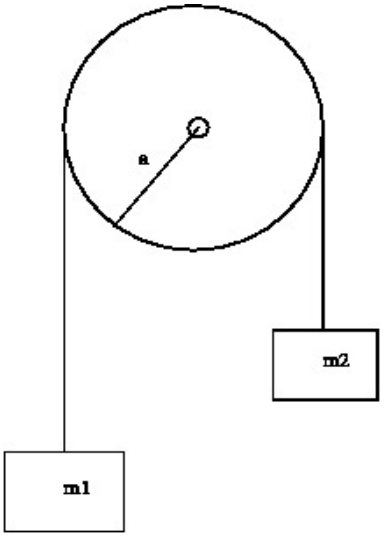


3. Considere o problema de uma conta que desliza sem atrito ao longo de uma haste retilínea que gira com velocidade angular constante ω num plano horizontal (figura 7, exemplo 1.5.2 do livro de Nivaldo). Obtenha a lagrangiana do sistema e as equações de movimento. Faça uma integração explícita das equações de movimento e grafique a trajetória da partícula no plano xy.

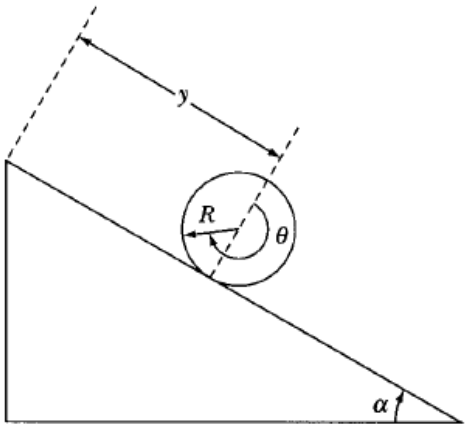


7: Conta deslizando ao longo de uma haste horizontal girante.

4. A *máquina de Atwood* da figura consiste numa polia de raio *a* e momento de inércia *I* em relação a um eixo perpendicular a ela passando pelo centro de massa. Uma corda de massa desprezível e indeformável, de comprimento *l*, conecta dois blocos nos extremos, de massas m_1 e m_2, respectivamente. Obtenha a lagrangiana do sistema e calcule a aceleração dos blocos.



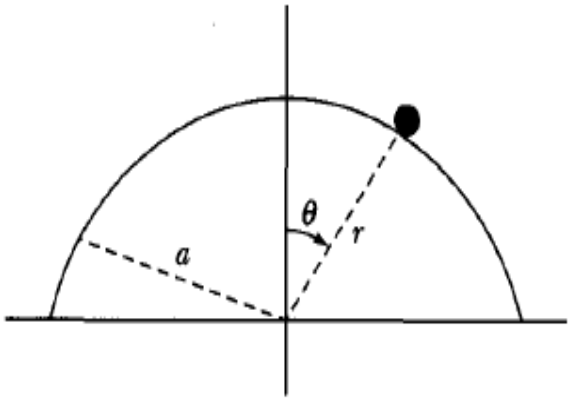
5. Um disco rola sem deslizar para baixo de um plano inclinado por um ângulo α, como mostra a figura. Determine a equação de vínculo em termos das coordenadas y e θ. Obtenha as equações de movimento pelo método dos multiplicadores de Lagrange e identifique as forças de vínculo. Qual a interpretação física das forças de vínculo neste caso ?



6. Considere um pêndulo simples de massa *m* e comprimento *l*, e descreva a posição da massa no instante *t* num sistema de coordenadas polares (r, θ). O sistema possui um vínculo holônomo.

(a) Determine a equação do vínculo e a lagrangiana no sistema de coordenadas generalizadas (r, θ).
(b) Obtenha as equações de Lagrange pelo método dos multiplicadores de Lagrange.
(c) Identifique as forças de vínculo generalizadas. Qual a interpretação física das mesmas ?

7. Uma partícula de massa *m* desce, a partir do repouso, por um hemisfério liso de raio *a*, como mostra a figura. Determine a força de vínculo e o ângulo para o qual a partícula perde contato com o hemisfério.



8. Considere o potencial generalizado para uma partícula de carga e em um campo eletromagnético: $U = e\phi - \frac{e}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}$, onde $\phi(\vec{x}, t)$ é o potencial escalar do campo eletromagnético, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ é o potencial vetorial e $\vec{v}$ é a velocidade da partícula. Partindo deste potencial mostre que a força correspondente é a força de Lorentz:
$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B})$, onde $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B}(\vec{x}, t)$ são o campo elétrico e o campo magnético, respectivamente.

9. Uma extensão da "função de dissipação" de Rayleigh ao caso de forças dissipativas não proporcionais à velocidade é discutida no artigo de E. Minguzzi, *Rayleigh dissipation function at work*, que se encontra na web em arXiv.org, referência arXiv:1409.4041, ou European Journal of Physics 36 (2015), 035014. Leia o artigo e descreva, resumidamente, os principais resultados no contexto do visto em sala de aula.

10. O "Teorema de Bertrand" afirma que os únicos potenciais centrais para os quais todas as órbitas limitadas são fechadas são o potencial gravitacional $V(r) = -\kappa/r$ e o "potencial elástico" $V(r) = \alpha\, r^2$, onde κ e α são constantes reais positivas. Escreva a lagrangiana para uma partícula sujeita a um potencial elástico em três dimensões espaciais, determine a equações de movimento e a equação da trajetória. Analise a possibilidade de integrar a equação da trajetória e discuta o tipo de soluções (órbitas) possíveis para este potencial.

11. Resolva os problemas 2.1, 2.5, 2.10, 2.11, 2.12, 2.16, 2.19 do livro de Nivaldo Lemos.

12. Demonstre, por substituição direta nas equações de Lagrange, que lagrangianas equivalentes geram as mesmas equações de movimento (Exercício 2.3.1 do Nivaldo).

13. Considere uma partícula movendo-se livremente no plano xy, exceto pelo vínculo não-holônomo:

$$\dot{x} - \omega y = 0,$$

onde ω é uma constante.

- Prove que o vínculo é não-holônomo.
- Encontre a solução geral das equações de movimento do sistema usando o método dos multiplicadores de Lagrange e identifique as forças de vínculo.
- Resolva a equações de Newton para o sistema sujeito as forças de vínculo encontradas no item anterior. A solução encontrada satisfaz automaticamente o vínculo não-holônomo ? Em que condições o vínculo é obedecido durante todo o movimento?